

# Tehnički uslovi za regulacione sisteme

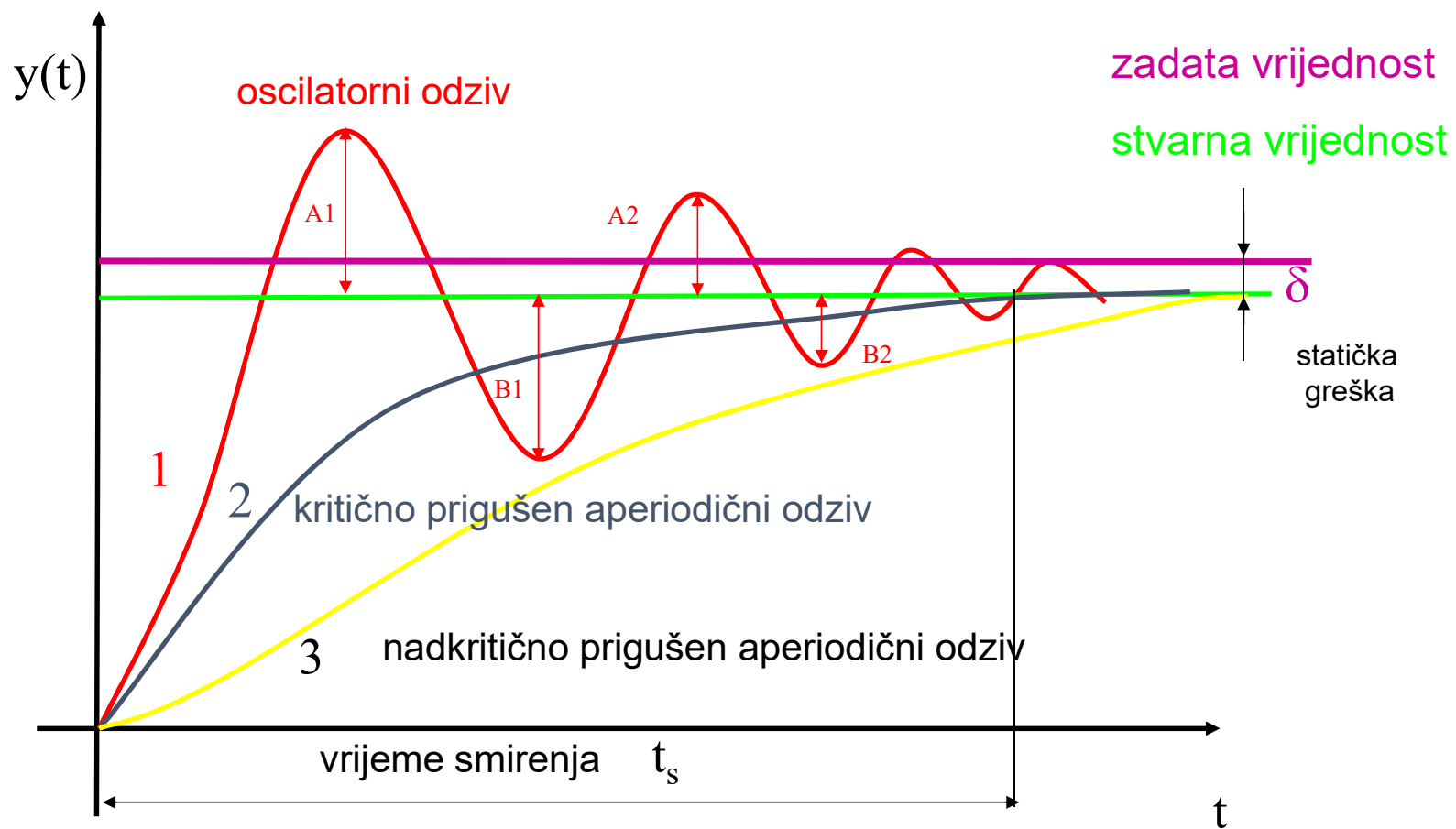
## Tehnički uslovi za regulacione konture

Neosporno je da ogromna većina regulacionih kontura pripada skupu kontura kojima dominira princip negativne povratne sprege.

Obzirom da se kod svih kontura sa povratnom spregom kao osnovni problem postavlja pitanje stabilnosti konture, prirodan put ka kvantitativnoj ocjeni kvaliteta rada konture i definisanja pokazatelja kvaliteta upravljanja vodi preko kvantitativnog određivanja stepena stabilnosti regulacionog kruga.

Apsolutna stabilnost – nužan ali ne i dovoljan uslov stabilnosti konture, potrebno je da kontura bude i relativno stabilna. Stepem relativne stabilnosti konture će u daljem izlaganju upravo i biti onaj pokazatelj kvaliteta preko kojega će se ocijenjivati rad konture ili koji će biti temeljni tehnički uslov pri sintezi regulacione konture.

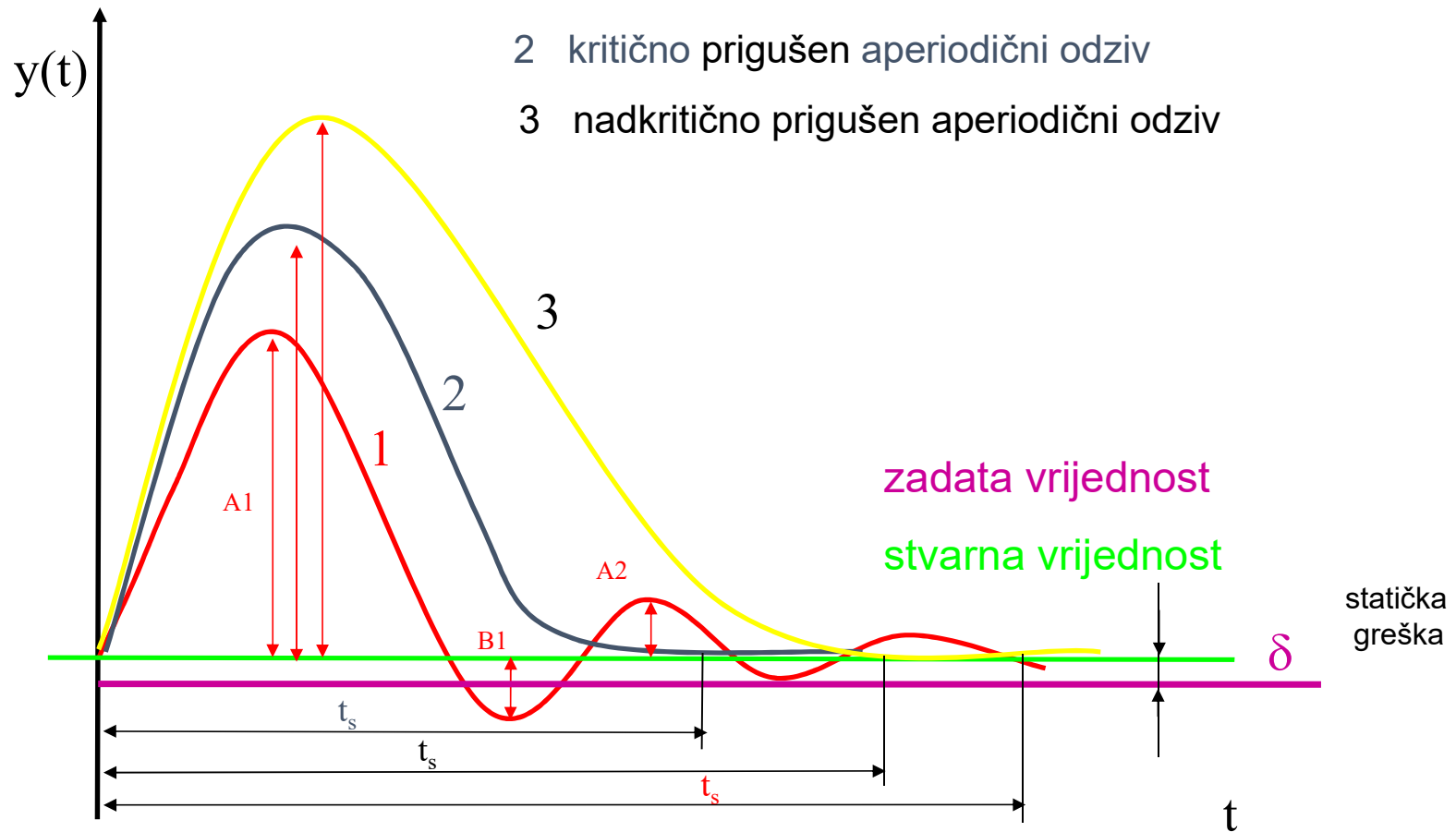
Očigledno je, da tehnički uslovi imaju svoje jasno fizičko značenje samo u vremenskom domenu opisivanja sistema. Vremenski odziv sistema, ma kojeg tipa on bio, omogućava lagano određivanje osnovnih parametara koji ga karakterišu.



VREMENSKI ODZIVI ZATVORENE KONTURE PRI PROMJENI ZADATE VRIJEDNOSTI

# Tehnički uslovi u vremenskom domenu

- 1 oscilatorni odziv
- 2 kritično prigušen aperiodični odziv
- 3 nadkritično prigušen aperiodični odziv



VREMENSKI ODZIVI ZATVORENE KONTURE PRI POJAVI SMETNJE

U oba slučaja se uočava da se kvalitet upravljanja može opisati pomoću tri pokazatelja:

- veličina prvog preskoka  $A_1$
- vrijeme smirenja  $t_s$
- statička greška  $\delta$

Idealno upravljanje :  $A_1=0$ ,  $t_s=0$  i  $\delta=0$

Nemoguće postići jer akcija za otklanjanje greške slijedi kao reakcija na grešku

**Metode sinteze su primjenjive u nevremenskom domenu**

Obje vrste odziva su od interesa, jer su prvi relevantni kod pozicionih servomehanizama, programske regulacije i računarski koordinisane regulacije, a drugi kod stabilizacionih kontura. U oba slučaja se vidi da se kvaliteta regulacije može kvantitativno opisati sa tri pokazatelja: veličinom prvog preskoka  $A_1$ , vremenom smirenja  $t_s$ , i statičkom greškom  $\delta$ . Moguće je uvesti i neke druge oznake (npr. veličinu drugog pozitivnog preskoka  $A_2$ , itd.), ali su te veličine vezene jednoznačno za već navedene tri i ne nose nikakvu novu informaciju u sebi, ali nekad mogu biti pogodne za primjenu. Idealno reguliran sistem bi imao jednoznačan skup vrijednosti  $A_1 = 0$ ,  $t_s = 0$ ,  $\delta = 0$ , što je, međutim, nemoguće postići, jer sistemi sa povratnom spregom kao svoju inherentnu osobinu nose pravilo: akcija za otklanjanje greške slijedi samo kao reakcija na pojavu greške. Zato realni sistemi sa povratnom spregom imaju te veličine različite od nule i tehnički uslovi na kvalitet regulacije svode se upravo na definiciju dopuštenih vrijednosti tih triju veličina.

Veličina  $\delta$  u principu može biti svedena na veoma malenu vrijednost uzimanjem u algoritam regulatora integralne komponente i nije vezana sa definicijom stabilnosti odziva (ali kao uzročnik postojanja integralne komponente u algoritmu regulatora posredno djeluje na stabilnost konture).

Veličine  $A_1$  i  $t_s$  za sve slučajeve linearnih sistema sa prigušenjima, ne većim od kritičnog, su jednoznačno povezane veličine, te ako je određena jedna, zapravo je određena i druga. Kako se u praksi veoma rijetko od sistema zahtijeva da ima nadkritični prigušen odziv, u daljem bit će izučavani slučajevi, koji leže između kritično prigušenog aperiodičnog odziva i oscilatornog, sa nekim stepenom oscilatornosti, definisanim relativnim odnosom prvog i drugo pozitivnog preskoka. Iz svega navedenog slijedi, da će u daljem razmatranju oscilatornost prelaznog procesa, kao najvažniji pokazatelj kvaliteta rada sistema, biti razmotrena prosto kao mjera relativne stabilnosti sistema.

Ali, na žalost, veoma shvatljiva razmatranja koja su vezana uz definiciju kvaliteta regulacije, prema slici, neprimjenjiva su direktno pri sintezi sistema sa povratnom spregom. Naime, metode sinteze sistema automatske regulacije su isključivo primjenjive u nevremenskim domenima ( $s$  domenu,  $j\omega$  domenu,  $\text{Re}-\text{Im}$  domenu itd.), te je potrebno tehničke uslove, uvijek zadatne u vremenskom domenu, preslikati u domen u kojem se vrši sinteza. Ovo predavanje će upravo prikazati napomenutu proceduru – definisanje tehničkih uslova u vremenskom domenu i njihovo preslikavanje u domen u kome se vrši sinteza .

# Tehnički uslovi u vremenskom domenu

Da bi se definisali tehnički uslovi za sisteme automatske regulacije dovoljno jednostavno, a za praktične svrhe sa zadovoljavajućom korektnošću, moguće je izvršiti aproksimaciju odziva sistema  $n$ -tog reda sa sistemom drugog reda, na bazi sledećeg razmatranja:

Odziv 1 sa prve slike kao oscilatoran nastao je kao rezultat postojanja konjugovano kompleksnog para korjena karakteristične jednačine sistema. Najveći uticaj na formu odziva ima par korjena koji je najbliži imaginarnoj osi  $s$  ravni. Ukoliko postoje i drugi korjeni, ali dalje od imaginarne ose, njihov realni dio ima veći apsolutni iznos i prema tome predstavljaju komponentu u odzivu koja iščezava u daleko kraćem vremenu nego li je  $t_s$ , te je amplitudni uticaj toga para konjugovano kompleksnih korjena zanemarljiv, ako se nalaze bar tri puta više lijevo u  $s$  ravni u poređenju sa prvim ili dominantnim parom. Prema tome, ovaj pristup je tačan za slučaj sistema drugog reda, veoma dobra i opravdana aproksimacija sistema višeg reda sa jednim dominantnim parom korjena i jedna komponenta tačnog rješenja za slučaj sistema višeg reda kod koga nema dominantnog para korijena.

Prema tome, ako se pođe od karakteristične jednačine sistema drugog reda:



Pođimo od sistema:  $T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = kx$

Uslov oscilatornosti rješenja:  $\frac{T_1}{T_2} < 2$

Stepen prigušenja:  $\Psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1}$

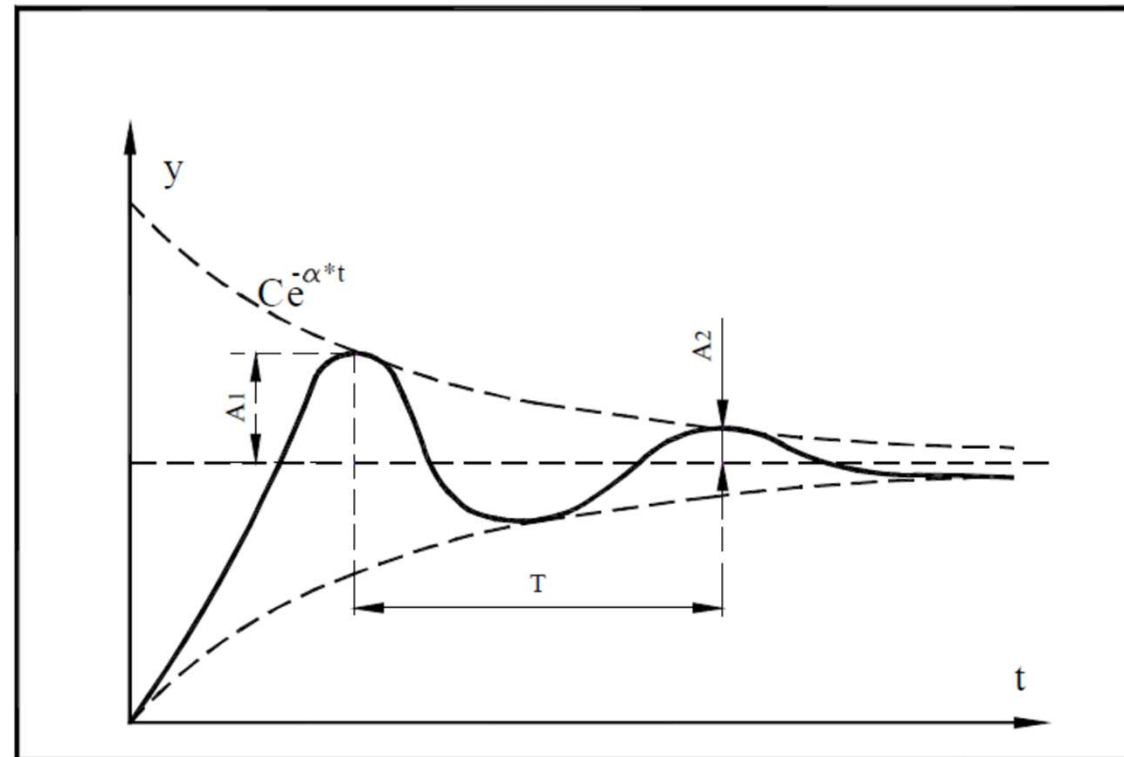
$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$$

$$A_2 = A_1 e^{-\alpha T} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$A_2 = A_1 e^{-2\pi \frac{\alpha}{\omega}}$$

$$\Psi = 1 - e^{-2\pi \frac{\alpha}{\omega}}$$

$$\frac{\alpha}{\omega} = \frac{T_1}{2T_2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{T_1}{2T_2}\right)^2}}$$



Relacija

$$\Psi = 1 - e^{-2\pi \frac{\alpha}{\omega}} \quad (**)$$

predstavlja direktnu vezu tehničkih uslova u vremenskom domenu ( $\psi$ ) sa s-domenom ( $\alpha/\omega$ ).

Da bi se pristupilo sintezi u s-domenu treba imati identifikovan objekat upravljanja sa punim informacijama o polovima i nulama prenosne funkcije, što je veoma teško ostvariti pri identifikaciji objekta – tehnološkog procesa, jer metode identifikacije praktično primjenjive na tehničke procese ne daju kao rezultat prenosnu funkciju, nego vremensku ili amplitudno – faznu karakteristiku. Čak i pri upotrebi dosta složenih pretvaranja karakteristika dobivenih eksperimentom, u prenosnu funkciju, pojavljuje se teškoća uzrokovana činjenicom, da tehnološki procesi najčešće sadrže elemente kako prenosnog tako i transportnog (čistog) kašnjenja, što daje transcendentnu formu prenosnoj funkciji, a poznato je da su metode sinteze u ravni primjenjive samo na racionalne forme prenosnih funkcija.

Veoma prihvatljive metode upotrebe s-ravni pri sintezi servomehanizama, elektromehaničkih konvertora energije itd., gube primjenljivost pri sintezi regulacionih sistema na objektima – tehnološkim procesima koji usled prisustva kašnjenja pripadaju neminimalno faznim sistemima. Iz istih razloga sinteza neće biti moguća ni preko logaritamskih karakteristika, te će slijedeći korak biti preslikavanje jed. (\*\*) u domen amplitudno-fazne karakteristike gdje će se i vršiti sinteza.

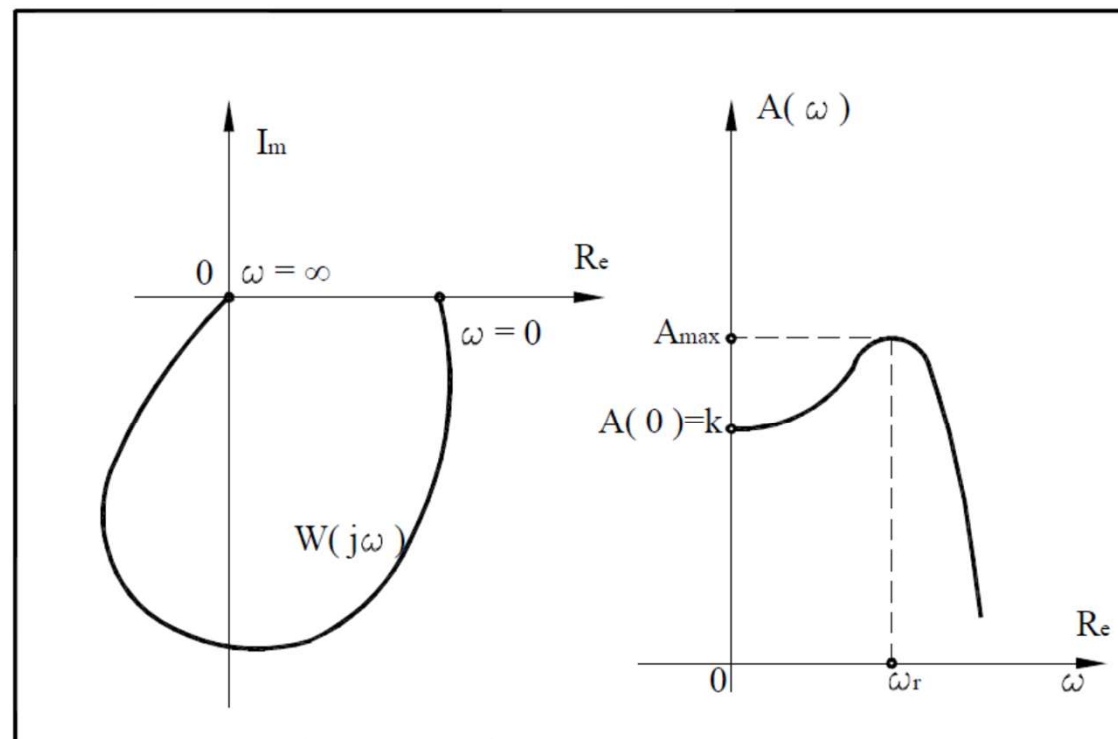
## Tehnički uslovi SAU u domenu AF(amplitudsko-fazne) k-ke

Amplitudno fazna karakteristika sistema opisanog jednačinom  
je:

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = kx$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1-\omega^2 T_2^2)^2 + \omega^2 T_1^2}} e^{j \arctg\left(-\frac{\omega T_1}{1-\omega^2 T_2^2}\right)} \quad (\text{xx})$$

Grafički oblik ove amplitudno-fazne karakteristike kao i amplitudno frekventne za isti sistem, prikazani su na slici 2.3.



**Slika 2.3.**

Oscilatornom karakteru vremenske karakteristike odgovara postojanje u amplitudno-frekventnoj karakteristici rezonantnog vrha, pri čemu nije teško pokazati da među veličinom toga vrha i stepenom prigušenja  $\psi$  postoji jednoznačna veza.

Stvarno, amplitudno-frekventna karakteristika ima maksimum, kada podkorjeni izraz u imeniocu (xx) ima minimum. Uzevši izvod toga izraza i jednačeći ga sa nulom, dobije se izraz za rezonantnu frekvenciju

$$\omega_r = \frac{1}{T_2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^2}$$

Ako se vrijednost rezonantne frekvencije uvrsti u (xx) dobije se veličina rezonantnog vrha

$$A_{max} = \frac{k}{\frac{T_1}{T_2} \sqrt{1 - \left( \frac{T_1}{2T_2} \right)^2}}$$

Na taj način, odnos maksimuma amplitudno frekventne karakteristike  $A(\omega_r) = A_{\max}$  prema njenoj veličini pri nultoj frekvenciji  $A(0) = k$ , kao i stepen prigušenja  $\psi$ , zavisi samo od odnosa vremenskih konstanti  $T1 / T2$ . Rezultati proračuna zavisnosti  $A_{\max} / A(0)$ , a takođe i odnos prirodne frekvencije sistema  $\omega$  prema rezonantnoj frekvenciji  $\omega_r$ , od stepena prigušenja  $\psi$  dati su u tabeli.

$\psi$	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
$\frac{A_{\max}}{A(0)}$	3,09	2,70	2,38	2,09	1,80	1,55	1,29
$\frac{\omega}{\omega_r}$	1,012	1,019	1,024	1,035	1,049	1,075	1,13

Pri tome je uzet u obzir samo onaj dijapazon vrijednosti  $\psi$  koji je od praktičnog interesa. Vidljivo je da se veličina rezonantnog vrha povećava sa smanjenjem stepena prigušenja  $\psi$ , te je veličina

$$\frac{A_{\max}}{A(0)} = M \quad \text{dobila naziv **POKAZATELJ OSCILATORNOSTI** .}$$

$$\frac{A_{\max}}{A(0)} = M$$

## POKAZATELJ OSCILATORNOSTI

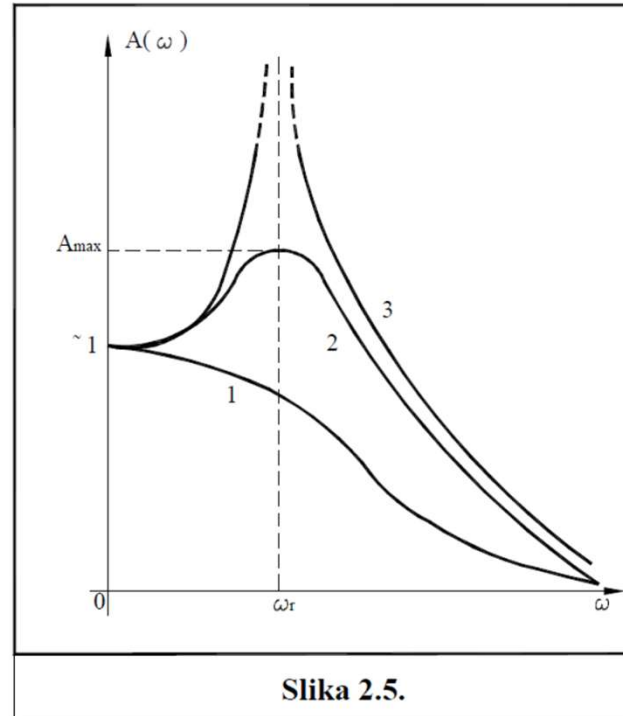
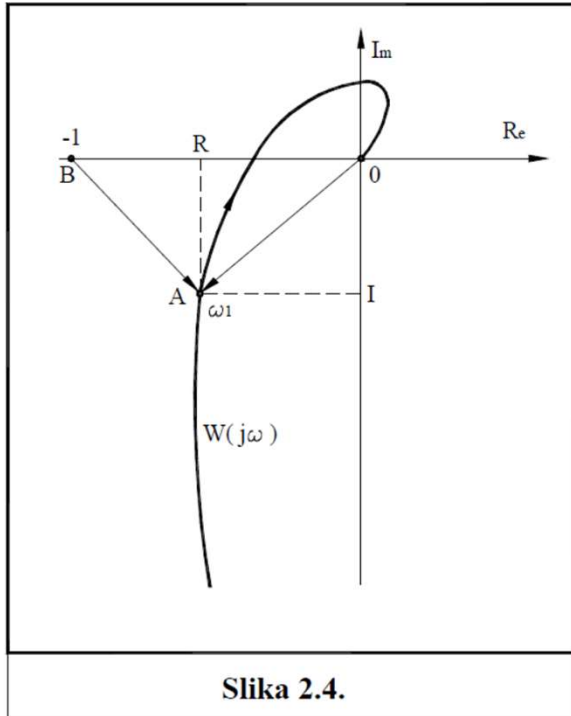
Za  $M > 1,5$  tabela pokazuje da se prirodna frekvencija  $\omega$  veoma malo razlikuje od rezonantne frekvencije  $\omega_r$ .

Na ovaj način je izvršeno preslikavanje tehničkog uslova  $\Psi$  iz vremenskog domena u domen amplitudno-frekventne karakteristike, dovodeći u vezi veličinu  $\Psi$  određenu u vremenskom domenu, i veličinu  $M$  koja ima svoju definiciju u domenu amplitudno - frekventne karakteristike.

Sledeći korak je preslikavanje  $M$  u domen izabran za sintezu tj. domen amplitudsko fazne karakteristike.

Neka je amplitudno-fazna karakteristika otvorenog sistema  $W(j\omega)$  data kao na sl. 2.4.

Amplitudno-frekventna karakteristika zatvorenog sistema je u tom slučaju

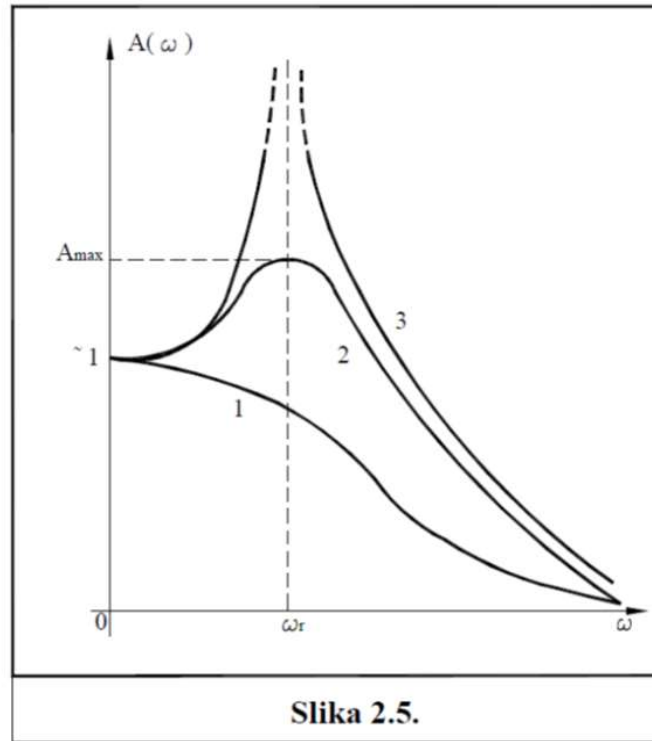
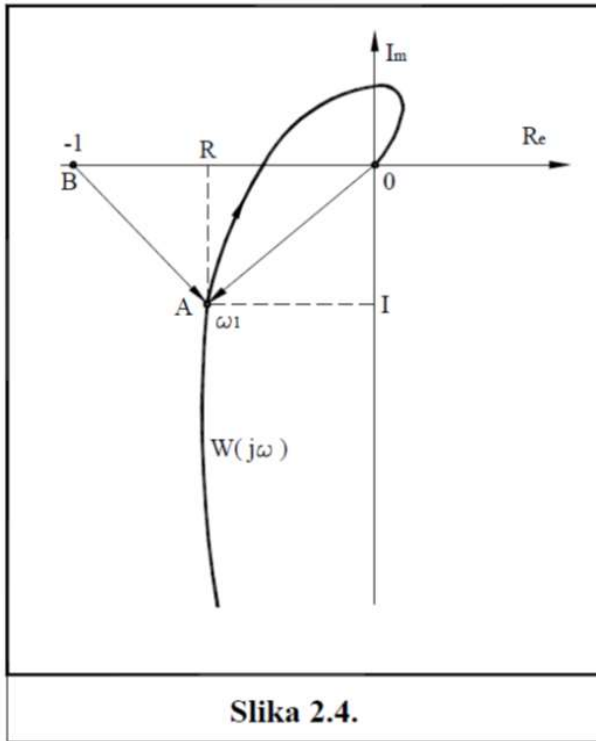


$$A(\omega) = |\Phi(j\omega)| = \frac{|W(j\omega)|}{|1 + W(j\omega)|}$$

Brojilac ove formule za neku frekvenciju  $\omega_1$ , jednak je dužini odsječka OA, a imenilac - dužini odsječka BA te slijedi

$$A(\omega_1) = \frac{OA}{BA}$$

Ako sistem sadrži u konturi regulator, koji ima u algoritmu upravljanja integralnu komponentu ili ako je objekt bez svojstva samoizravnjanja (astatski), tada modul amplitudno-fazne karakteristike otvorenog sistema pri  $\omega = 0$  postaje beskonačan. U tom slučaju odnos dužina odsječka OA i BA pri  $\omega = 0$  je jednak jedinici. Ako u sistemu postoji regulator sa samo proporcionalnim djelovanjem, tada je taj odnos blizak jedinici, jer dužina odsječka je u tom slučaju, po pravilu, mnogo veća od jedinice.



Pri povećanju frekvencije tačka A se pomjera kako je naznačeno strelicom. Ako amplitudno-fazna karakteristika otvorenog sistema prolazi dovoljno daleko od tačke  $(-1, j0)$ , tada dužina odreska BA cijelo vrijeme ostaje duža od veličine odreska OA i pri  $\omega \rightarrow \infty$  stremi prema jedinici. Istovremeno sa tim dužina odreska OA se smanjuje stremeći ka nuli. Zato pri promjeni frekvencije od  $\omega = 0$  do  $\omega \rightarrow \infty$  amplitudno-frekventna karakteristika zatvorenog sistema se monotonno smanjuje od jedinice do nule, kao kriva 1 na sl. 2.5.

Ako amplitudno-fazna karakteristika prolazi dosta blizu tačke  $(-1, j0)$ , dužina odsječka BA pri nekim frekvencijama je manja od dužine odsječka OA. Zato u nekom dijapazonu frekvencija od  $\omega = 0$  do  $\omega = \omega_r$  amplitudno frekventna karakteristika zatvorenog sistema raste od jedinice do nekog maksimalnog iznosa  $A_{max}$ . Idući dalje, kao posledica toga da pri  $\omega \rightarrow \infty$  OA stremi ka nuli, a OB ka jedinici, karakteristika stremi ka nuli (sl. 2.5, kriva 2). Čim bliže prolazi amplitudno fazna karakteristika otvorenog sistema tački  $(-1, j0)$ , tim je veći maksimum amplitudno frekventne karakteristike zatvorenog sistema. Na kraju, kada amplitudno fazna karakteristika zatvorenog sistema prolazi kroz tačku  $(-1, j0)$ , maksimum amplitudno frekventne karakteristike zatvorenog sistema ide u beskonačnost (sl. 2.5, kriva 3), jer u tom slučaju  $BA=0$  na mjestu presjeka  $W(j\omega)$  sa negativnom realnom osom.

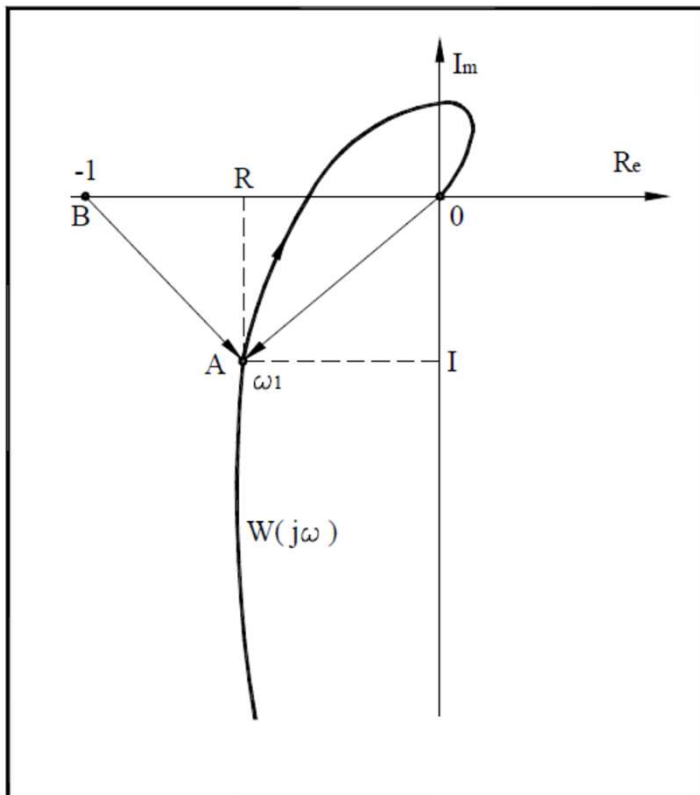


Na taj način, čim veći maksimum ima amplitudna frekventna karakteristika zatvorenog sistema, tim je amplitudno fazna karakteristika otvorenog sistema bliža "opasnoj" tački  $(-1, j0)$  i kao posledica toga manja je relativna stabilnost sistema.

Koristeći formulu  $A(\omega_1) = \frac{OA}{BA}$ , može se odrediti kakve uslove mora zadovoljavati položaj amplitudno-fazne karakteristike u odnosu na tačku  $(-1, j0)$  da bi maksimum amplitudno-frekventne karakteristike zatvorenog sistema imao zadatu veličinu. U tu svrhu je neophodno naći geometrijsko mjesto tačaka u kompleksnoj ravni amplitudno-fazne karakteristike otvorenog sistema, koja zadovoljavaju uslov da odnos odsječaka OA i BA ima konstantnu veličinu  $M = \text{const}$ :

$$\frac{OA}{BA} = M = \textit{konst.}$$

$$\frac{OA}{BA} = M = konst.$$



Slika 2.4.

Sa slike 2.4. slijedi

$$OA = \sqrt{R^2 + I^2}$$

$$BA = \sqrt{(1 - R)^2 + I^2}$$

$$M^2 = \frac{R^2 + I^2}{(1 - R)^2 + I^2}$$

Poslije transformacija, poslednja jednačina poprima oblik

$$\left( R + \frac{M^2}{1 - M^2} \right)^2 + I^2 = \left( \frac{M}{1 - M^2} \right)^2$$

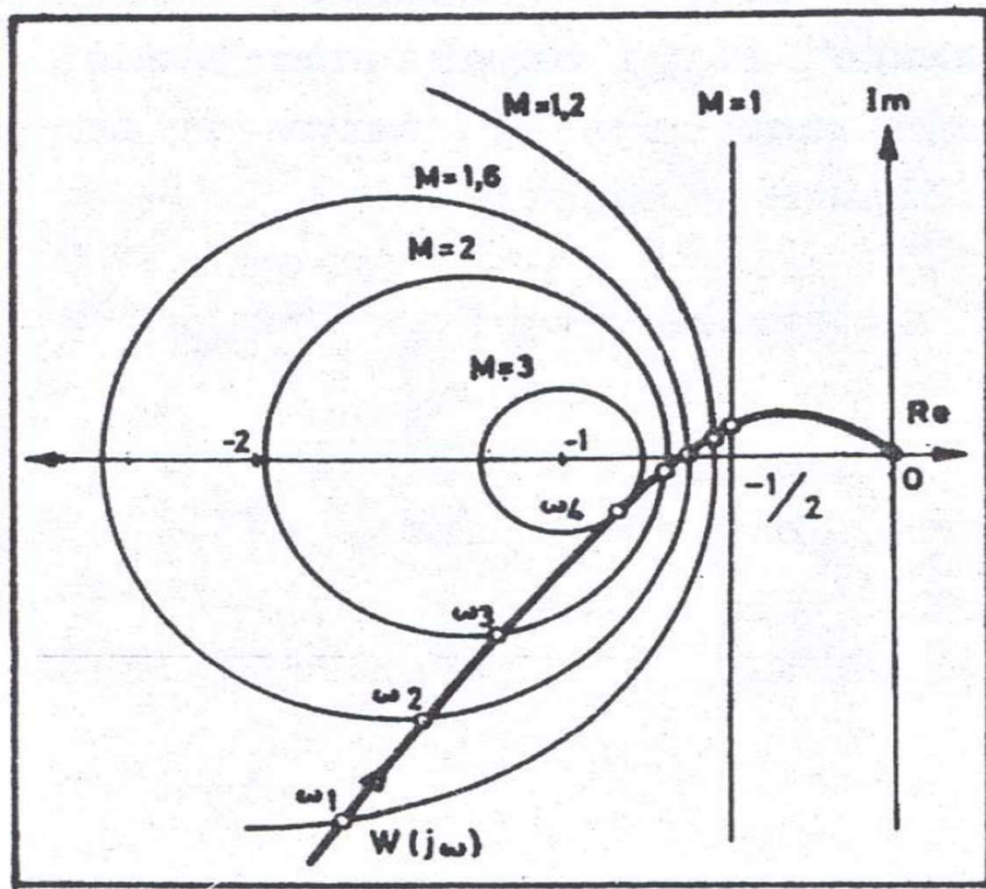
Dobijena jednačina je jednačina kruga, čiji je poluprečnik,

$$r = \frac{M}{M^2 - 1}$$

a centar je smješten na negativnoj realnoj poluosi na udaljenosti

$$R_0 = \frac{M^2}{M^2 - 1}$$

od koordinatnog početka.



Na slici 2.6 pokazana je familija krugova za različite iznose  $M$ .

Dobijeni kružni dijagram omogućava laganu konstrukciju amplitudno-frekventne karakteristike zatvorenog sistema na osnovu amplitudno-fazne karakteristike otvorenog sistema jer je  $A(\omega_1)$  za neku frekvenciju  $\omega_1$  jednako indeksu  $M$  kruga koji sječe  $W(j\omega)$  pri toj frekvenciji. Nije teško primjetiti da je maksimum amplitudno-frekventne karakteristike zatvorenog sistema jednak indeksu kruga kojeg tangira amplitudno fazna karakteristika otvorenog sistema, a frekvencija na kojoj je maksimum amplitude (rezonantna frekvencija sistema) je jednaka frekvenciji pri kojoj se dešava tangiranje.

Na taj način, zahtjev da maksimum amplitudno frekventne karakteristike zatvorenog sistema ne bude veći od unaprijed zadate veličine svodi se na zahtjev da amplitudno-fazna karakteristika otvorenog sistema ne uđe u oblast ograničenu krugom sa parametrima  $r$  i  $R_0$ .

Dakle, uslov apsolutne stabilnosti, koji se izražava zahtjevom da  $W(j\omega)$  ne obuhvati tačku  $(-1, j0)$ , se pooštrava na uslov relativne stabilnosti, koji traži da  $W(j\omega)$  ne uđe u zabranjenu oblast koja okružuje "opasnu" tačku  $(-1, j0)$ .

Na ovaj način, tehnički uslovi na kvalitet prelaznog procesa zatvorene konture, definisani u vremenskom domenu sa  $\psi$ , preslikani su u domen u kome će se vršiti sinteza konture tj. domen amplitudno-fazne karakteristike, gdje su tehnički uslovi okarakterisani sa brojem  $M$ .

U tehničkoj praksi se smatra da sistem upravljanja sa povratnom spregom ima zadovoljavajuću relativnu stabilnost (rezervu stabilnosti) ako pokazatelj oscilatornosti  $M$  nije veći od 3, što odgovara približno relativnoj stabilnosti sistema podešenog prema integralnom kriterijumu  $\text{MIN} \int \varepsilon_y^2 dt$  gdje je  $\varepsilon_y$  greška koordinate  $y$ . Na veću relativnu stabilnost nego li je  $M=1$  obično se ne ide jer to daje preveliki iznos  $\int \varepsilon_y^2 dt$  i veliko vrijeme smirenja  $T_s$ .

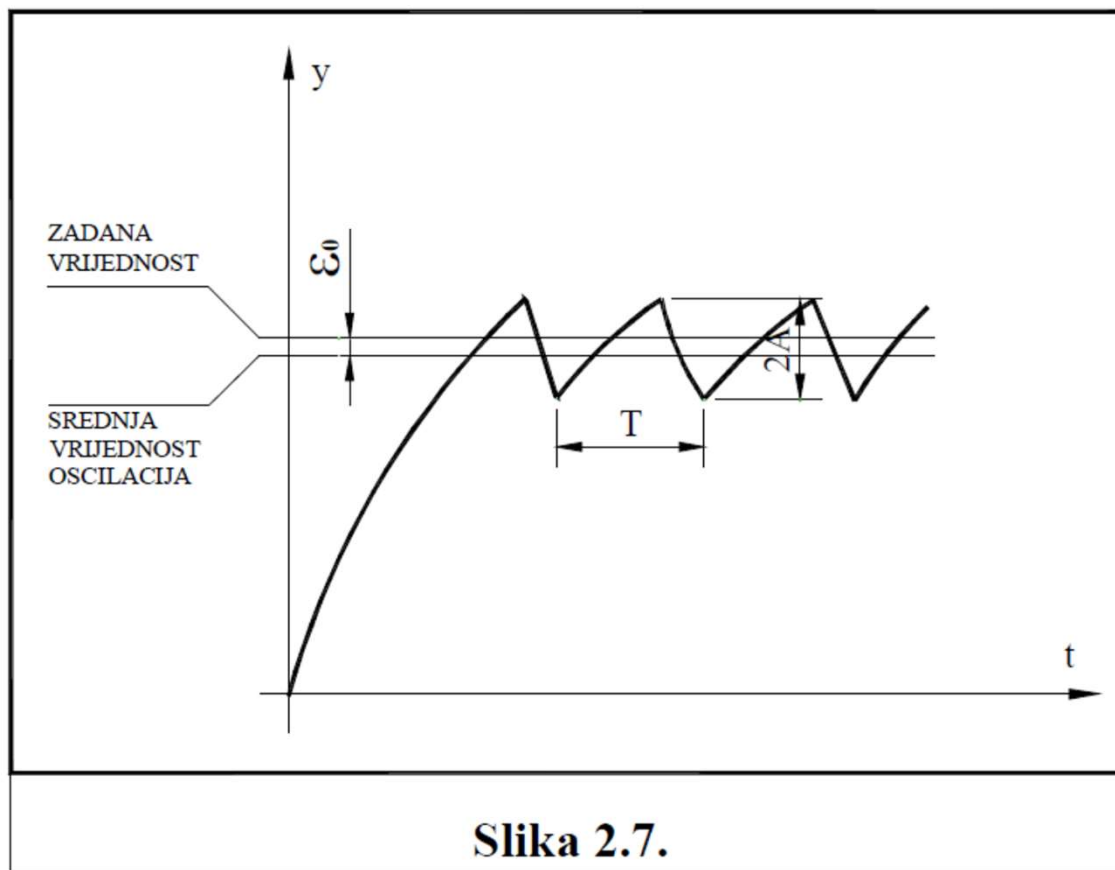
S obzirom da praktično upotrebljivi opseg  $M$  ide od  $M=1$  do  $M=3$ , tipični prelazni režimi su odabrani kako je pokazano u tabeli 7. Izbor jednog od ovih kriterijuma zavisi od konkretnog tehnološkog procesa ili vrste regulisane veličine, u skladu sa karakteristikama kriterijuma s obzirom na  $T_s$  i  $A_1$  i sa zahtjevima procesa sa kojim se upravlja. Treba napomenuti da se kao opis kvaliteta regulacione konture može koristiti i  $R_d$  koji se zove POKAZATELJ DINAMIČKOG KVALITETA konture, a jednak je procentualnom iznosu  $A_1$ , od odziva neregulisanog objekta.

Tabela 7.

$M$	Relativna stabilnost približno odgovara onoj koju ima sistem podešen prema kriteriju	N a z i v	Karakteristike odziva
3	$\min \int \varepsilon_y^2 dt$	Kriterijum minimuma integrala kvadrata greške	$T_s$ veliko, $A_1$ maleno
~1,61	$B_1 = 0,2 A_1$	Kriterijum 20%-tne oscilatornosti	$T_s$ osrednje, $A_1$ osrednje
1	$B_1 = 0$	Aperiodički kriterijum	$T_s$ maleno, $A_1$ veliko

## TEHNIČKI USLOVI ZA KONTURE UPRAVLJANE DVOPOZICIONIM REGULATORIMA

U prethodnom su dijelu izučavani tehnički uslovi na sisteme automatskog upravljanja se odnose na konture upravljane linearnim regulatorima tipa P, PI, PD, I, PID te su i odzivi sa slika napočetku predavanja u skladu sa tim. Međutim, dvopozicioni regulatori daju odzive saglasno sl. 2.7, te je potrebno definisati tehničke uslove na sisteme upravljane takvim regulatorima i to samo u vremenskom domenu, pošto za nelinearne sisteme od svih metoda imaju smisla samo metoda koja izučava sistem u vremenskom domenu ili domenu faznog prostora (fazne ravni za sisteme do drugog reda). Međutim, pošto vrijeme nije eksplicitna koordinata u metodi faznog prostora, a vrijeme je jedan od glavnih tehničkih uslova u ovakvim sistemima, preostaje samo da se razmatra vremenski domen i da se sinteza vrši korišćenjem činjenice da je sistem upravljan dvopozicionim regulatorom zapravo u odsječcima linearan sistem.



**Slika 2.7.**

Tehnički uslovi na zatvorene regulacione konture sa dvopozicionim regulatorima odnose se isključivo na parametre kvazistacionarnog stanja, tj. stacionarnih oscilacija oko zadate vrijednosti, a to su:

T - period oscilacija

A - amplituda oscilacija

$\epsilon_0$  - statička greška srednje vrijednosti oscilacija

Ako ovakvi sistemi u sebi imaju prekidačke elemente kontaktnog tipa tada je veoma važno da broj prekidanja u jedinici vremena bude što manji (da se produži životni vijek kontakata) te slijedi zahtjev da  $T$  bude što veće.

Prirodno je da trenutna odstupanja od zadate vrijednosti budu što manja, pa se traži da i veličina  $2A$  bude što manja.

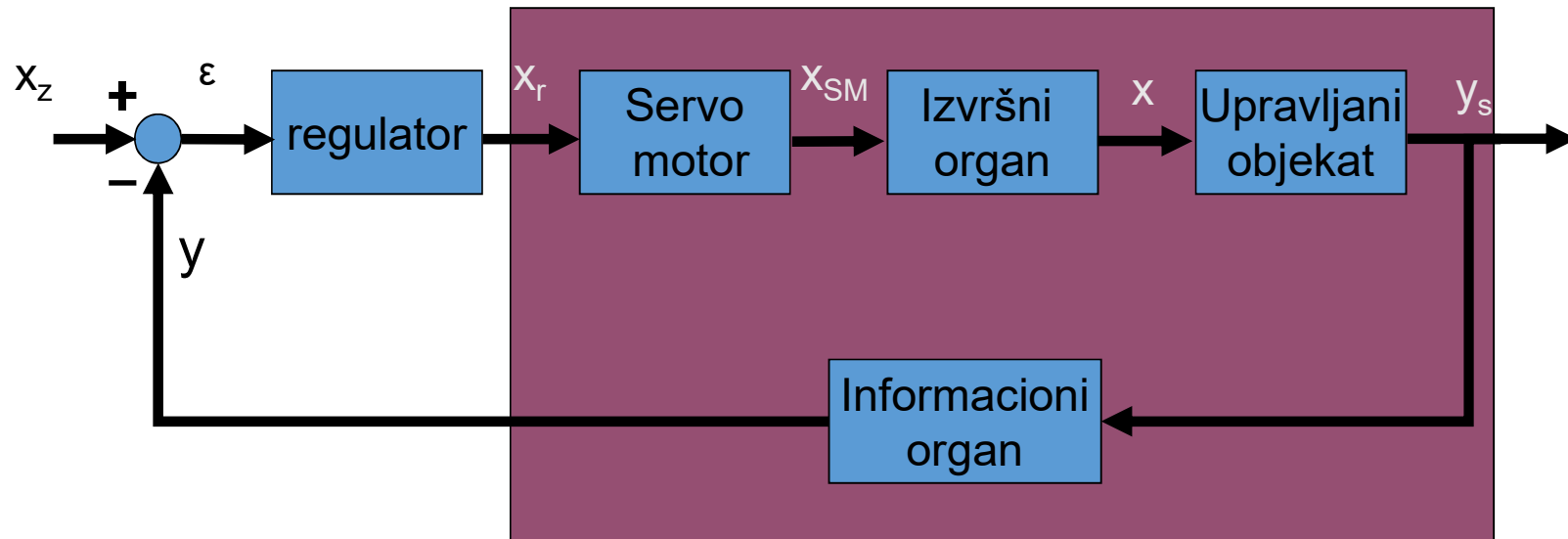
Takođe je potrebno da i  $\varepsilon_0$  bude što manje.

Kako će biti pokazano kasnije prva dva zahtjeva su kontradiktorna, jer smanjenje  $2A$  smanjuje i  $T$ , te se u ovakvim sistemima obično ide na kompromis, koji se tačno definiše za svaki konkretni slučaj, zavisno od tehnološkog procesa kojim se upravlja.

Međutim, ako su prekidački elementi u ovakvom sistemu beskontaktni, te im životni vijek nije zavisn o broju preključavanja, kao osnovni uslov se pojavljuje  $2A$ , a o  $T$  se ne vodi posebno računa, nego se  $T$  tretira kao zavisn parametar na koji se ne postavljaju posebni zahtjevi.

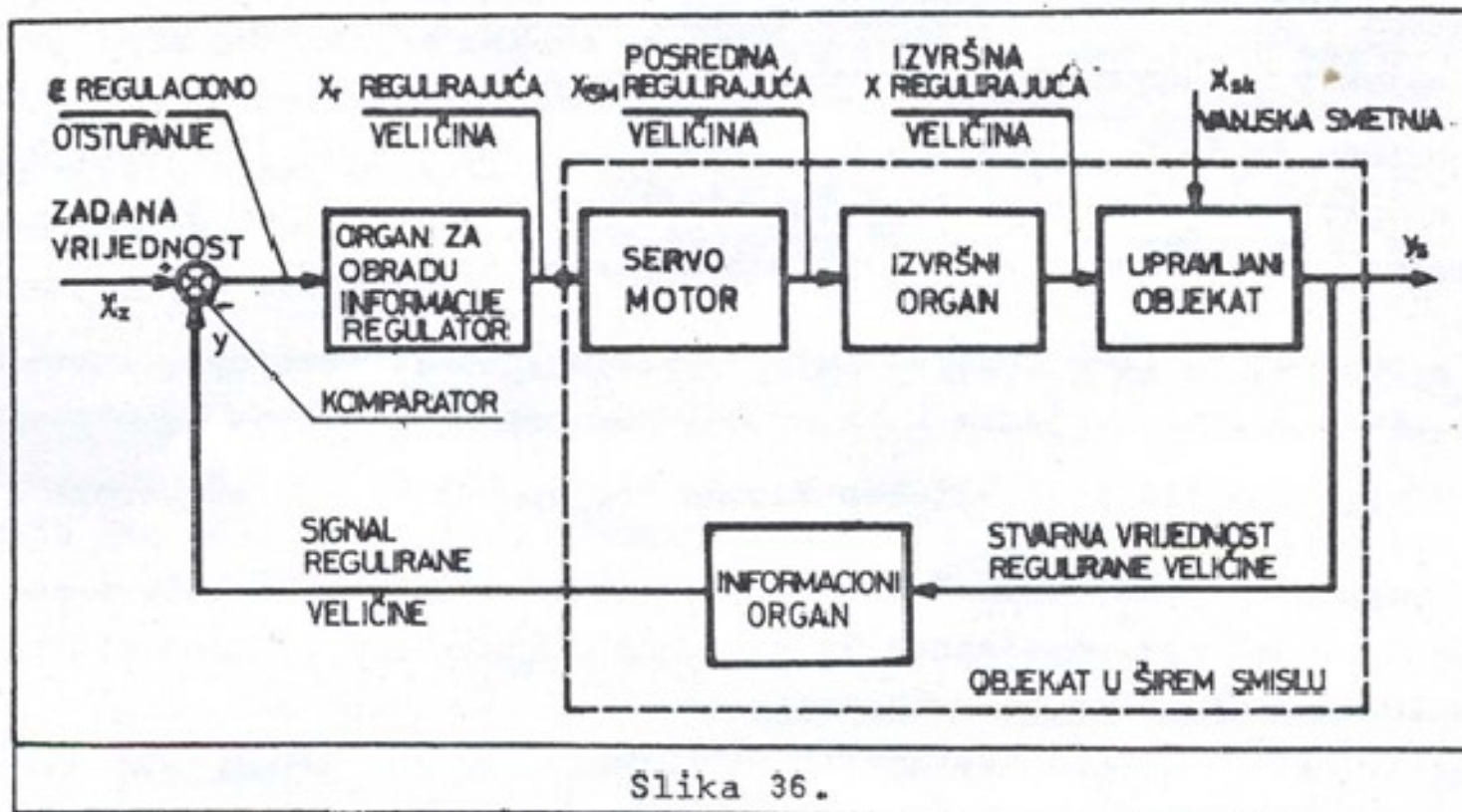


# Prosti regulacioni krug



Objekat u širem smislu

Najprostiji sistem automatskog upravljanja jednom regulisanom veličinom može se predstaviti slikom



Stanje objekta je definisano veličinom  $\mathbf{y}_s$ . Ako se želi upravljati objektom, to se postiže na taj način da se veličina  $\mathbf{y}_s$  prisili na ponašanje po unaprijed zadatom zakonu koji je definisan zadatom vrijednošću  $\mathbf{x}_z$ . Zadana vrijednost  $\mathbf{x}_z$  u opštem slučaju je vremenski promjenjiva funkcija, a u posebnom slučaju može biti i konstanta. U prvom slučaju se radi o upravljanju veličinom  $\mathbf{y}$ , a u drugom slučaju o stabilizaciji veličine  $\mathbf{y}$ .

Stvarno stanje objekta se mjeri informacionim organom i to mjerenjem stvarne vrijednosti  $\mathbf{y}_s$  regulisane veličine, pa se signal  $\mathbf{y}$  koji predstavlja signal regulisane veličine u pogodnoj formi vodi na poređenje sa zadatom vrijednošću  $\mathbf{x}_z$ . Razlika zadate i mjere stvarne vrijednosti, regulaciono odstupanje  $\epsilon$  je ulazna informacija u organ za obradu informacije (regulator) koji generiše na svome izlazu regulacionu veličinu  $\mathbf{x}_r$ . Regulaciona veličina  $\mathbf{x}_r$  je signal predstavljen vremenskom funkcijom koja je po obliku i predznaku upravo takva da djelujući na objekat izjednači signal regulisane veličine  $\mathbf{y}$  sa zadatom vrijednošću  $\mathbf{x}_z$ , bez obzira na postojanje smetnje  $\mathbf{x}_{sk}$  (indeks  $k$  pokazuje da se radi o 1,2..., $k$  smetnji). Regulaciona veličina  $\mathbf{x}_r$  obično nije u takvoj formi da može izvesti odgovarajući zahvat na objektu te je u servomotoru potrebno izvršiti energetska pojačanje signala koje izvršnom organu omogućava pogodno djelovanje na objekat izvršnom regulirajućom veličinom  $\mathbf{x}$ .

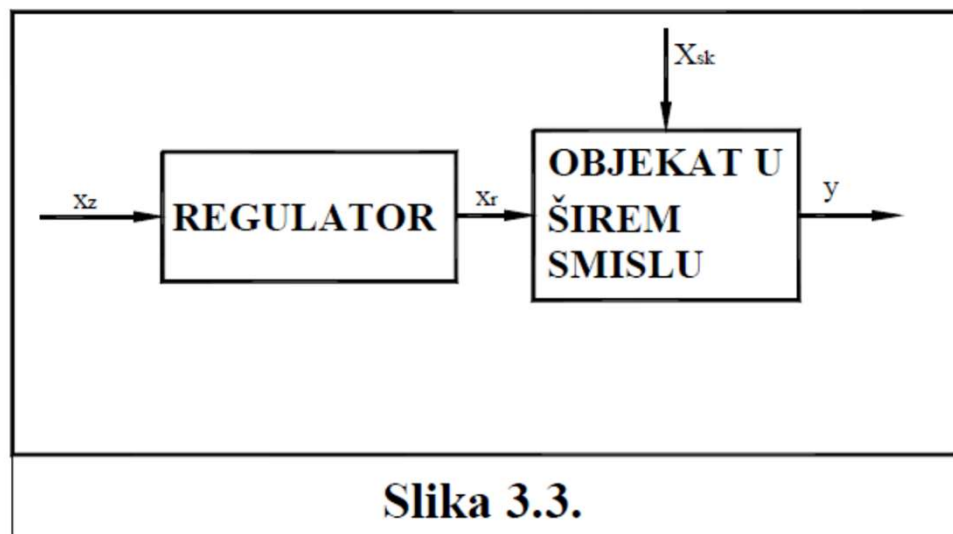
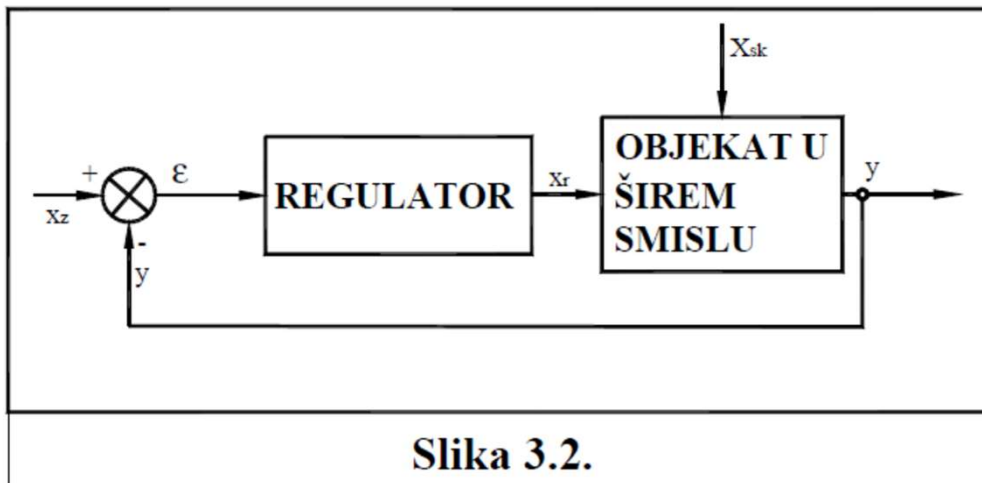
S obzirom da je regulator onaj elemenat koji na osnovu informacije sa objekta generiše regulacionu veličinu, očigledno je da se svi elementi konture mogu grupisati u dva glavna kompleksa

1.- objekat u širem smislu, koji se sastoji od servomotora, izvršnog organa, objekta i informacionog organa

2.- regulator sa postavljačem zadate vrijednosti i komparatorom

jer regulator pred sobom "vidi" upravo objekat u širem smislu i parametre podešavanja regulatora je potrebno prilagoditi cijelom prvom kompleksu. Regulator ne može separirati uticaj dinamike i statike objekta od dinamike i statike informacionog organa servomotora ili izvršnog organa.

Upravo radi toga se proračun regulatora i provodi prema objektu u širem smislu. Zato će u daljem tekstu, osim kod izučavanja izbora i dimenzioniranja izvršnih i informacionih organa, cijelo vrijeme biti razmatran objekat u širem smislu kao integralni kompleks, te će sl. 36 preći u sl. 3.2 gdje su prikazani sistemi upravljanja sa i na sl. 3.3 bez povratne sprege, respektivno, a koji će biti detaljno izučavani u daljem tekstu.



Jedan od osnovnih zadataka koji se pojavljuju pri projektovanju sistema upravljanja je izbor najpogodnijeg za dati objekat zakona upravljanja koji treba biti sadržan u regulatoru (tj. izbor zakona obrade informacije  $\epsilon$  u cilju generisanja korektne veličine  $x_r$ ). Teškoća u rješavanju ovog zadatka je u tome što signali i međudjelovanja cirkulišu u zatvorenoj konturi. Zatvorenost konture se ogleda u postojanju povratne sprege, koja je neophodna zato da bi na ulaz regulatora mogla stizati kontinualno informacija o stanju objekta u svakom trenutku vremena.

Pri odsustvu povratne sprege, proračuni se značajno uprošćavaju, ali se pojavljuje mogućnost da regulisana veličina nekontrolisano "odšeta" od zadate vrijednosti kao rezultat djelovanja na objekat vanjskih smetnji i neizbježnih netačnosti u aparaturnama sistema upravljanja.

Sistem sa povratnom spregom, osim teškoća koje proizlaze iz same činjenice o cirkulaciji signala u zatvorenoj konturi, ima još jednu osobinu koja mu je svojstvena. Naime, regulator stupa u djelovanje tek poslije pojave određenog regulacionog odstupanja, pa regulaciona odstupanja principijelno ne mogu biti izbjegnuta. Jedino se može sistem projektovati tako da ta odstupanja budu što manja. Kasnije će se pokazati da se smanjenje greške upravljanja i povećanje tačnosti rada sistema može dobiti putem povećanja pojačanja regulatora što omogućava da regulator generiše regulacionu veličinu na osnovu veoma malog regulacionog odstupanja. Ali, veličina pojačanja je ograničena, kako tehničkim mogućnostima aparature, tako i činjenicom da sistemi sa povratnom spregom pri povećanju pojačanja mogu izgubiti stabilnost. Da se i pri većem pojačanju dobije zadovoljavajuća stabilnost potrebno je usložiti zakon upravljanja, što opet podiže cijenu rešenja. Na taj način zadatak izbora najprihvatljivijeg zakona upravljanja svodi se ka izboru razumnog kompromisa između tačnosti, stabilnog ponašanja konture i prostote realizacije sistema.

Predmet izučavanja ovoga dijela je upravo u definisanju smetnji koje kvare rad sistema, kriterijuma podešenja sistema koji optimalno odstranjuje uticaje smetnji, kao i ograničenja diktirana zahtjevima stabilnosti.

## SMETNJE U REGULACIONIM KONTURAMA

Jedan od glavnih uzroka koji remete rad objekta i otklanjaju regulisanu veličinu sa zadate vrijednosti ili već uspostavljenog stacionarnog stanja su smetnje. Smetnje se mogu klasifikovati prema više kriterijuma, što će i biti učinjeno u ovom dijelu.

**Po trajanju smetnje se mogu podijeliti na:**

1. dugotrajne,
2. smetnje srednjeg trajanja i
3. kratkotrajne smetnje.

Ocjena kojoj grupi smetnja pripada donosi se na osnovu poznavanja prelaznog procesa u dobro podešenoj konturi, tačnije poznavanja vremena smirenja vremenskog procesa  $T_s$ . Ako je trajanje smetnje duže od  $T_s$  smetnja se smatra dugotrajnom, ako je približno jednako  $T_s$  tada je smetnja srednjeg trajanja a ako je trajanje smetnje kraće od  $T_s$ , smetnja se smatra kratkotrajnom.

**Po učestanosti sa kojom napadaju objekat, smetnje se mogu podijeliti na dvije grupe**

1. česte smetnje i
2. rijetko dolazeće smetnje.

Ako je učestanost veća nego je  $T_s$ , smetnje se smatraju čestim smetnjama, i posebno su neugodne po sistem jer se sistem ni u jednom trenutku ne nalazi u stacionarnom stanju.

### **Po mjerljivosti smetnje se dijele na:**

- 1.mjerljive smetnje,
- 2.nemjerljive smetnje i
- 3.posebno mjerljive smetnje.

Prve su najmanje neugodne jer omogućavaju primjenu posebnih postupaka za otklanjanje njihovih uticaja, ali su veoma rijetke. Na žalost, smetnje druge grupe su najčešće i najteže se otklanjaju njihovi uticaji. Smetnje treće grupe su manje neugodne jer uz primjenu posebnih mjernih i tehnika procjene, uz nešto komplikovaniju aparaturu za njihovu ocjenu i posredno mjerenje problem svode na onaj koji postoji u prvoj grupi smetnji.

### **Po karakteru vremenske funkcije koja opisuje smetnju moguće je podijeliti smetnje na**

- 1.stohastičke (slučajne ) smetnje i
- 2.smetnje iz klase standardnih funkcija.

Slučajne smetnje imaju nepredvidiv karakter, a smetnje koje se susreću u industrijskim procesima najčešće spadaju u tu grupu. Smetnje iz klase standardnih funkcija mogu biti bilo kojeg vida . Nekada su one neželjeni pratilac rada procesa, a nekada se namjerno uvode u sistem, u svrhe testiranja sistema ili namjerne promjene režima rada sistema.



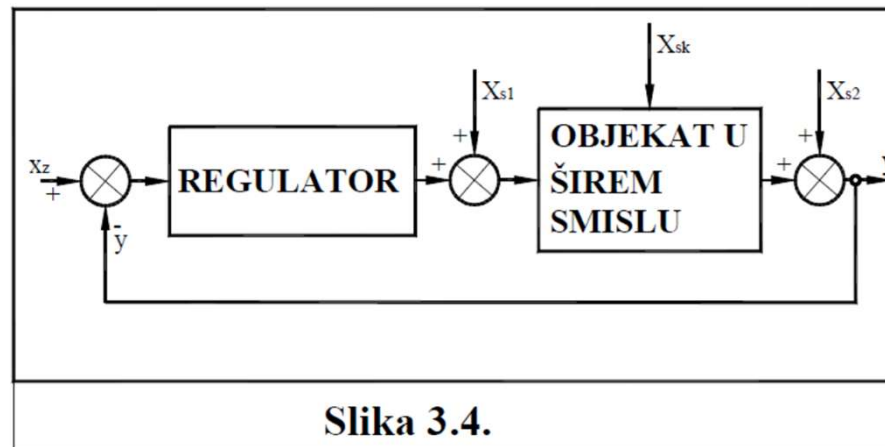
Po mjestu ulaza smetnje se mogu podijeliti na:

1. smetnje po opterećenju,
2. smetnje od strane izvršnog organa i
3. smetnje od strane zadate vrijednosti.

Sl.3.4. ilustruje smetnje sve tri grupe s obzirom na mjesto ulaza. Smetnja po opterećenju je označena sa  $x_{s2}$ , smetnja od strane izvršnog organa sa  $x_{s1}$ , a  $x_z$  je zadata vrijednost koja predstavlja smetnju ako je promjenjiva u toku vremena.

Pri tome izraz "od strane izvršnog organa" ne treba shvatiti tako da je izvršni organ uzrok smetnji nego "smetnja dolazi u objekat sa iste strane od kuda i djelovanje izvršnog organa".

Sa  $x_{sk}$  su označene smetnje bez naznake mjesta ulaza, kako se to često na šemama kontura označava uopšteno. Tek dopunska oznaka ili sama priroda smetnje  $x_{ck}$  dopunski opredjeljuje stvarno mjesto ulaza.



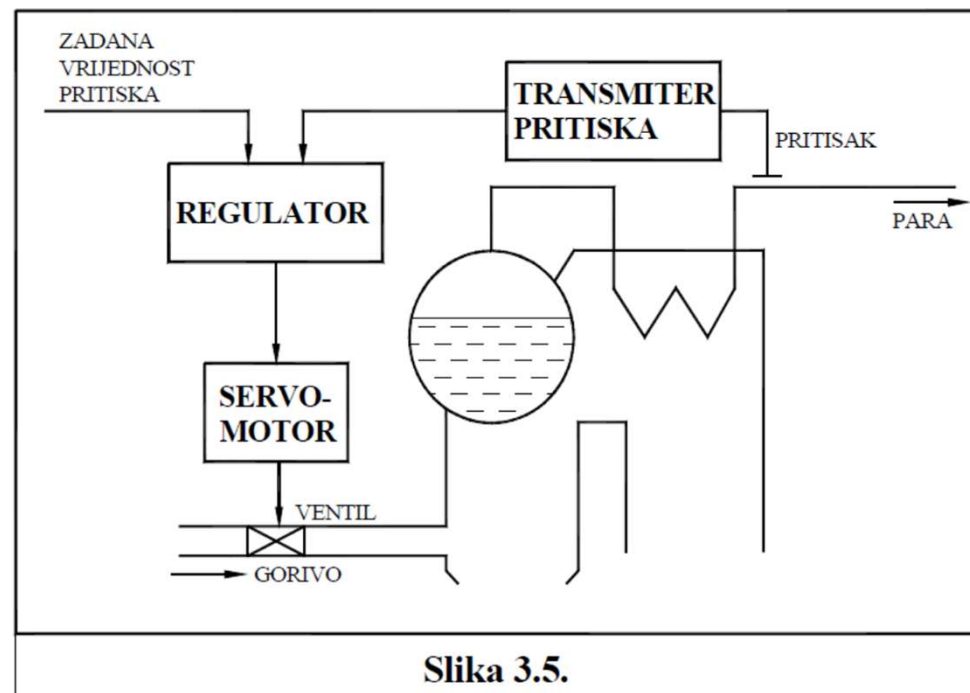
Slika 3.4.

Sledeći primjer će ilustrovati smetnje s obzirom na mjesto ulaza, sl.3.5. Jedna od regulisanih veličina generatora pare je pritisak, a njoj pripadna regulaciona veličina je protok goriva određene kalorične moći.

Ako se promijeni potrošnja pare na izlazu iz kotla, s obzirom na povezanost veličina protoka i pritiska pare u izlaznoj magistrali kotla promijenit će se i pritisak. Dakle, protok pare ovdje igra ulogu smetnje po opterećenju.

Ako se pri nekom ravnotežnom stanju prikazanog sistema, u jednom trenutku promijeni kalorična moć goriva to će djelovati na izlazni pritisak, i to je smetnja od strane izvršnog organa, jer bi se isti efekat mogao postići i pomjeranjem izvršnog organa pri nepromjenjenoj kaloričnoj moći goriva.

Ako pri ravnotežnom stanju istog sistema se promijeni zadata vrijednost, to će prouzrokovati, kroz regulator, servomotor i izvršni organ djelovanje koje će promijeniti pritisak na vrijednost koja odgovara novoj zadatoj vrijednosti. Dakle, sistem je dobio smetnju od strane zadate vrijednosti. Ovaj tip smetnji se pojavljuje kod regulacija odnosa, kaskadnih regulacija, računarskih koordinacija regulacionih krugova i programskih upravljanja.



Slika 3.5.

S obzirom da su smetnje, kako se iz navedenog vidi, veoma različite po izvoru, prirodi, mjestu ulaza itd., potrebno je da se nađe jedinstven način za kvantitativno vrednovanje smetnji.

Pošto je moguće, poštujući pravila algebre blokova, vršiti strukturne transformacije u sistemu automatskog upravljanja, opšte je prihvaćeno da se smetnje kvantitativno vrijednuju u procentima hoda izvršnog organa.

Drugim riječima, smetnje se, bez obzira na mjesto ulaza, prevode na ekvivalentni hod izvršnog organa, koji prouzrokuje isti efekat na regulisanu veličinu kao i veličina smetnje koja se razmatra.

## KRITERIJUM OPTIMALNOG PODEŠENJA REGULATORA

U realnim uslovima rada, svaki regulacioni sistem je podvrgnut uticaju smetnji i regulacionih veličina čiji karakter je najčešće nemoguće unaprijed predvidjeti. Zato je proračun parametara podešavanja sistema, opšte govoreći, potrebno provoditi polazeći od nekih usrednjenih karakteristika tih smetnji. Pri takvom pristupu nije moguće tačno odrediti prelazne procese koji se mogu pojaviti u sistemu u procesu njegovog rada, nego je moguće samo govoriti o najboljem ispunjavanju nekakvog kriterijuma koji sa potrebnim stepenom tačnosti karakteriše tačnost rada sistema. Ako je sistem neprekidno podvrgnut djelovanju promjenjivih smetnji te se cijelo vrijeme nalazi izvan stacionarnog stanja, tada je za istraživanje ponašanja takvog sistema potrebno koristiti matematički aparat teorije slučajnih procesa, a posebno je važno dobijanje spektralnih funkcija tih smetnji.

U praksi automatizacije proizvodnih procesa, u ogromnom broju slučajeva se radi o smetnjama koje se mogu posmatrati kao niz zasebnih smetnji, u periodima između kojih sistem uspijeva da dođe u stacionarno stanje. U tom slučaju sistem se može posmatrati običnim metodama, na osnovu spektra smetnje. Međutim, smetnje su veoma različite i nemoguće je za svaku smetnju poznavati njen spektar pa se moraju i spektri smetnji tipizirati pomoću usrednjavanja. Najčešći tipski spektar smetnji je onaj kod koga amplitude u spektru monotono opadaju sa porastom frekvencije, tj. smetnje imaju izražen niskofrekventni spektar. Takve će se smetnje u daljem tekstu i razmatrati.

Sa te tačke gledišta, idealnom regulacionom konturom treba smatrati onu koja ima idealna filterska svojstva tj. u opsegu frekvencija od  $\omega=0$  do  $\omega \rightarrow \infty$  ima amplitudno-frekventnu karakteristiku jednaku nuli s obzirom na smetnje, a u istom opsegu frekvencija ima amplitudno-frekventnu karakteristiku jednaku jedinici s obzirom na zadata vrijednost

$$|\phi_{sk}(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{X_{sk}(j\omega)} \right| = 0$$

$$|\phi_{xz}(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{X_z(j\omega)} \right| = 1$$

Ovaj uslov se u realnim sistemima ne može tačno ispuniti.

Zadatak izbora parametara podešenja regulatora i svodi se upravo na to da se u najvećem stepenu izvrši približenje amplitudno-frekventne karakteristike realnog sistema ka karakteristici idealnog sistema datoj gornjim jednačinama.

Ovo je riješeno metodama teorije približnih funkcija, koja se može formulirati na sledeći način:

Zadata je neka funkcija  $f_1(\omega)$  nezavisnog argumenta  $\omega$  i funkcija  $f_2(\omega, a, b, \dots)$  koja zavisi osim od  $\omega$  još i od nekih promjenjivih parametara  $a, b, \dots$ . Potrebno je tako odabrati brojne vrijednosti  $a, b, \dots$ , da razlika

$$f_2(\omega, a, b, \dots) - f_1(\omega)$$

bude minimalna u određenom smislu.

U ovom slučaju  $f_1(\omega)$  je amplitudno frekventna karakteristika idealnog sistema, karakteristika  $f_2(\omega, a, b, \dots)$  je amplitudno frekventna karakteristika realnog sistema, a promjenjivi parametri  $a, b, \dots$  parametri podešavanja regulatora.

Izbor približnog metoda, pomoću kojega se određuju parametri podešavanja sistema, diktirani su konkretnim uslovima njegovog rada. Pošto se u realnim sistemima ne može ispuniti jednačina koja traži da sistem bude idealan filter za smetnje, u opsegu frekvencija od  $\omega=0$  do  $\omega \rightarrow \infty$  parametri podešenja se biraju tako da sistem najintenzivnije filtrira "najopasnije" frekvencije spektra smetnje. Kako je već napomenuto, u proizvodnim procesima najčešće su smetnje sa izraženim niskofrekventnim dijelom spektra, te je i zadatak izbora približnog metoda time definisan. Kao primjer može se razmotriti spektar odskočne smetnje, kao najneugodnije moguće. Laplasova transformacija odskočne jedinične funkcije je

$$L[u(t)] = \frac{1}{s} \quad \text{Zamjenivši } s \text{ sa } j\omega, \text{ dobije se spektar} \quad S[u(t)] = \frac{1}{j\omega}$$

pa se vidi da intezitet spektra raste sa smanjenjem frekvencije. Dakle, "najopasnije" frekvencije spektra smetnje su niske, te i približenje  $f_2(\omega, a, b, \dots) - f_1(\omega) = \text{MIN}$  treba sprovesti u domenu niskih frekvencija.

Ako se uzme u obzir i činjenica da su realni elementi od kojih je realizovana regulaciona kontura svi od reda inercionog tipa, te su time niskofrekventni filteri, tada je kao metod približenja frekventnih karakteristika podobno izabrati onaj koji garantuje najbolje približenje u okolini  $\omega = 0$ . Ovome dovoljno dobro odgovara metod približenja putem razlaganja funkcije u Tajlorov red.

Amplitudno-frekventna karakteristika sistema obzirom na neku k-tu smetnju razloži se u Tajlorov red, sa centrom razlaganja u  $\omega = 0$ .

$$|\phi_{sk}(j\omega)| = |\phi_{sk}(j0)| + \frac{d}{d\omega} |\phi_{sk}(j0)| \Delta\omega + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\omega^2} |\phi_{sk}(j\omega)| \Delta\omega^2 + \dots$$

Cijela funkcija će manje odstupati od nule što je veći broj članova njenog razlaganja u red jednak nuli, te se uslovi optimalnosti mogu napisati kao

$$|\phi_{sk}(j0)| = 0$$

$$\frac{d}{d\omega} |\phi_{sk}(j0)| = 0.$$



Analogno tome za amplitudno-frekventnu karakteristiku sistema s obzirom na zadatu vrijednost slijedi

$$|\phi_{x_z}(j0)| = 1$$

$$\frac{d}{d\omega} |\phi_{x_z}(j0)| = 0.$$

Iz dobijenih jednačina određuju se parametri podešavanja regulatora. U slučaju da tačnu jednakost nuli koeficijenata razlaganja nije moguće dobiti, optimalnim parametrima podešavanja odgovaraju njihovi minimalni iznosi.

Kao napomena stoji da težnju ostvarivanja što bolje filtracije smetnji ne treba realizovati na račun stabilnosti sistema. Prema tome, proračun treba vršiti u sledećim etapama:

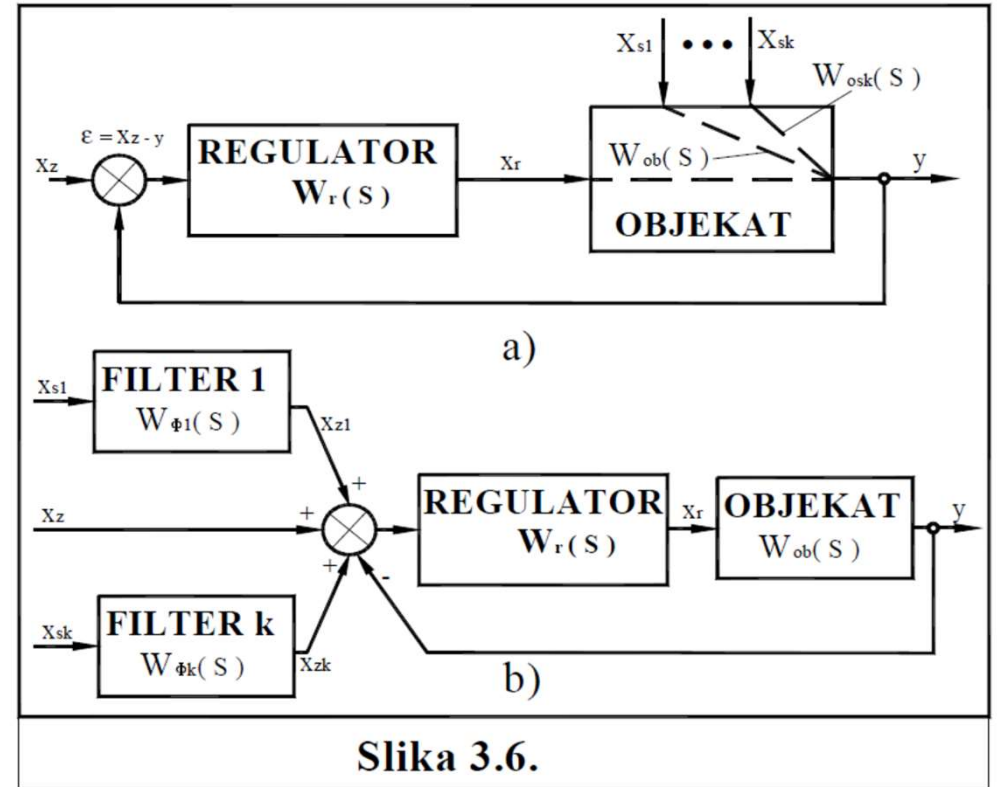
- 1.** U prostoru parametara podešavanja regulatora odredi se granica oblasti u kojoj sistem ima zadovoljavajuću relativnu stabilnost.
- 2.** U toj oblasti odredi se tačka koja zadovoljava minimalno odstupanje frekventnih karakteristika realnog sistema od karakteristika idealnog sistema.
- 3.** Bilo analitičkim, bilo grafičkim putem ali najčešće modeliranjem provjerava se rad tako podešenog sistema, te se mogu i parametri još dopunski utaćniti.

## REGULACIONA KONTURA KAO OPTIMALNI FILTER SMETNJI

Na sl. 3.6.a prikazana je prosta, jednokonturna regulaciona kontura koju napadaju smetnje  $x_{s1}, \dots, x_{sk}$ . Radi jednostavnosti, na slici, a i u daljem tekstu, umjesto objekat u širem smislu, označeno je prosto objekat.

Sledeće oznake će se koristiti u ovom razmatranju:

$y$  - mjera stvarne vrijednosti regulisane veličine  $y_s$ ,  
 kraće signal regulisane veličine  
 $x_z$  - zadata vrijednost regulisane veličine  
 $\epsilon$  - regulaciono odstupanje, razlika  $x_z - y$



Slika 3.6.

$$W_r(s) = \frac{X_r(s)}{\epsilon(s)}$$

$$W_{ob}(s) = \frac{Y(s)}{X_r(s)}$$

$$W_{ocik}(s) = \frac{Y(s)}{X_{zk}(s)}$$

prenosna funkcija objekta s obzirom na k-tu smetnju  $x_{sk}$

Za ovu šemu se mogu napisati jednačine

$$Y(s) = W_{ob}(s) \cdot X_r(s) + \sum_{i=1}^k W_{osi}(s) \cdot X_{si}(s);$$

$$X_r(s) = W_r(s) \cdot \varepsilon(s); \quad \varepsilon(s) = X_z(s) - Y(s)$$

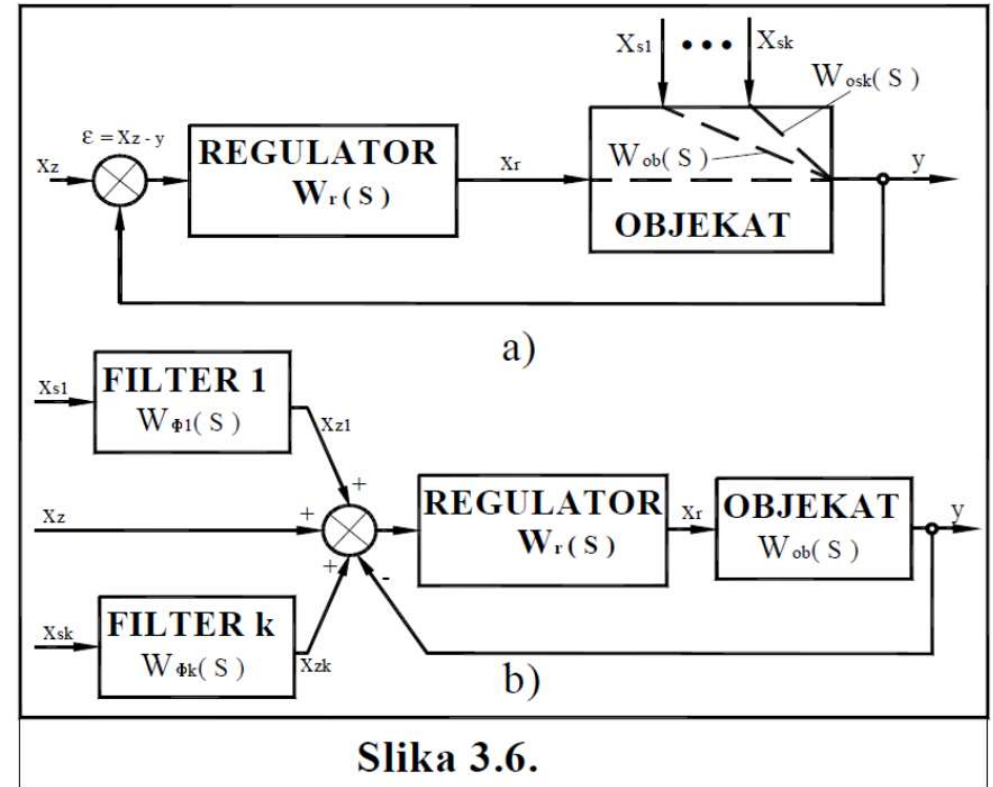
Eliminacijom  $X(s)$  i  $\varepsilon(s)$  se dobija izraz za regulisanu veličinu sistema s obzirom na signal regulacione veličine i smetnju

$$Y(s) = \Phi_z(s) \cdot X_z(s) + \sum_{i=1}^k \Phi_{si}(s) \cdot X_{si}(s)$$

Gdje su :

$$\Phi_z(s) = \frac{W_{ob}(s) \cdot W_r(s)}{1 + W_{ob}(s) \cdot W_r(s)}$$

$$\Phi_{si}(s) = \frac{W_{osi}(s)}{1 + W_{ob}(s) \cdot W_r(s)} \quad \text{za } i = 1, 2, 3 \dots \dots k.$$



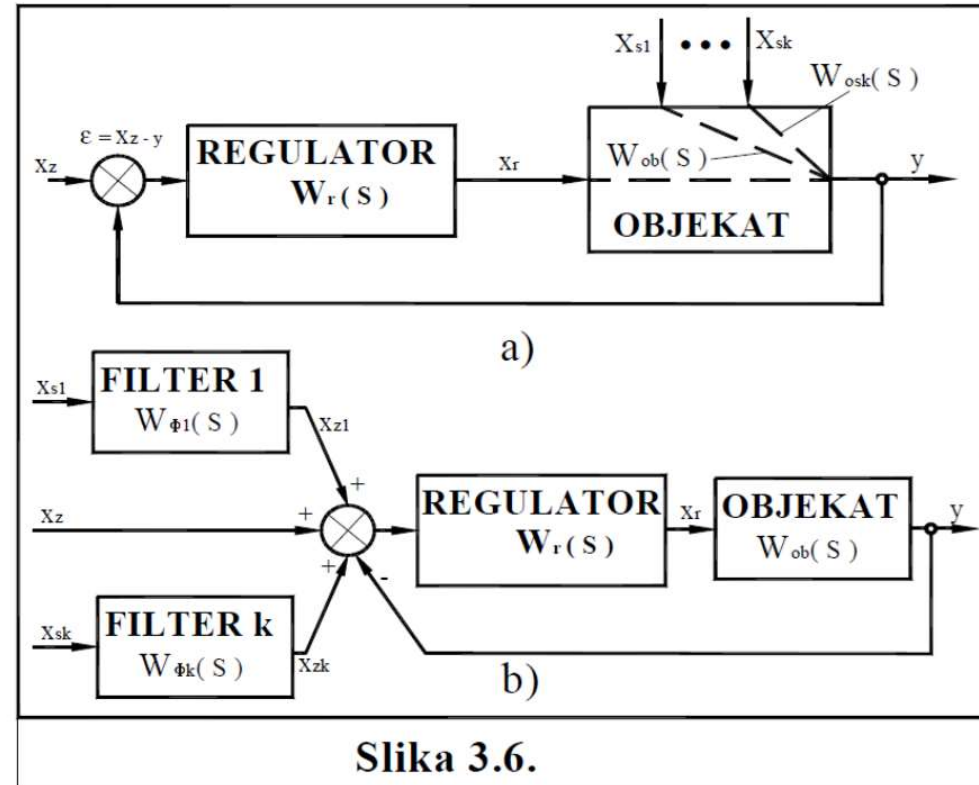
Slika 3.6.

Sistem automatskog upravljanja ima toliko ulaza koliko na njega djeluje zadatih vrijednosti i smetnji. Uslovi optimalnosti dobijaju značajno jasniji fizički smisao ako se sve smetnje prevedu formalno na isti ulaz sa zadatom vrijednošću. U tom slučaju strukturna šema sistema sa sl. 3.6a se može zamijeniti sa onom prikazanom na sl. 3.6b, gdje sve smetnje  $x_{s1}, \dots, x_{sk}$ , prolazeći prethodno kroz odgovarajuće filtere sa prenosnim funkcijama  $W_{\phi s1}(s), \dots, W_{\phi sk}(s)$  dolaze na ulaz regulatora u vidu dodatnih ulaza  $x_{z1}, \dots, x_{zk}$ , zajedno sa zadatom vrijednošću  $x_z$ .

Za transformisanu šemu se može pisati:

$$Y(s) = \Phi_z(s) \cdot X_z(s) + \Phi_z(s) \cdot \sum_{i=1}^k W_{\phi i}(s) \cdot X_{si}(s)$$

Pošto se radi o istom sistemu, samo u dvije formalne predstave, iz uslova ekvivalentnosti se može dobiti izraz za ulazne filtere



Slika 3.6.

$$W_{\phi i}(s) = \frac{W_{osi}(s)}{W_{ob}(s) \cdot W_r(s)} \quad \text{za } i = 1, 2, 3 \dots k.$$

Izlazne veličine filtera smetnji  $\mathbf{x}_{s1}, \dots, \mathbf{x}_{sk}$ , mogu se posmatrati kao smetnje koje se superponiraju na korisni signal  $\mathbf{x}_z$ , koji sistem mora propuštati maksimalno. Zato se uslovi najmanjeg uticaja smetnji na sistem formalno svode na to da se izborom odgovarajućeg podešenja regulatora svedu mogući izlazi filtera smetnji na nulu, ili što manju vrijednost. U vezi sa tim, uslovi optimalnosti mogu se zamijeniti sa

$$|W_{\phi_i}(j\omega)| = 0$$

$$\frac{d}{d\omega} |W_{\phi_i}(j\omega)| = 0 \quad \text{za } i = 1, 2, 3 \dots k$$

$$|\Phi_z(j\omega)| = 1$$

$$\frac{d}{d\omega} |\Phi_z(j\omega)| = 0$$

tj. podešenje regulatora je optimalno, ako su amplitudno-frekventne karakteristike filtera smetnji i njihovih izvoda što manje različite od nule.

Treba primjetiti da je jednačin izvedena za  $\omega = 0$  i mogu se dobiti pogrešni rezultati ako amplitudno-frekventna karakteristika ima izražen rezonantni vrh na rezonantnoj frekvenciji. Ali pri  $M < 2$ , rezultati su zadovoljavajuće dobri.

U svojstvu primjera, uslovi će biti primijenjeni na standardne regulatore tipa P, I, PI i PID.

## P regulator

Prenosna funkcija P regulatora je  $W_r(s)=k_r$ . Amplitudno-frekventna karakteristika filtera proizvoljne k-te smetnje

$$|W_{\phi k}(j\omega)| = \left| \frac{W_{osk}(j\omega)}{W_{ob}(j\omega)} \right| \cdot \frac{1}{k_r} \quad \text{pri } \omega = 0 \text{ dobija oblik} \quad |W_{\phi k}(j0)| = \frac{k_{osk}}{k_{ob}} \cdot \frac{1}{k_r}$$

gdje su  $k_{osk}$  i  $k_{ob}$  - koeficijenti statičkog pojačanja objekta s obzirom na k-tu smetnju i regulirajuću veličinu.

$k_r$  predstavlja jedini stepen slobode u jednačini s obzirom da su  $k_{osk}$  i  $k_{ob}$  faktori na koje se ne može djelovati, promjena  $k_r$  predstavlja jedinu mogućnost da se ta jednačina privede ka nuli ili na neku minimalnu vrijednost. To se može postići povećanjem  $k_r$  i kada  $k_r \rightarrow \infty$ , cijeli  $W_{\phi k}(j0) \rightarrow 0$ . Na taj način, s gledišta najbolje filtracije smetnje, P regulator treba podešavati tako da se  $k_r$  postavi na neku maksimalnu vrijednost.

## I regulator

Prenosna funkcija I regulatora je

$$W_r(s) = \frac{1}{T_i s}.$$

Amplitudno-frekventna karakteristika filtra za proizvoljnu k-tu smetnju u sistemu sa I regulatorom određena je formulom

$$|W_{\phi k}(j\omega)| = \left| \frac{W_{osk}(j\omega)}{W_{ob}(j\omega)} \right| \cdot \frac{\omega}{1/T_i}$$

Pri  $\omega=0$  ova karakteristika je jednaka nuli. Zato pri određivanju uslova optimalnog podešenja regulatora treba naći izraz za prvi izvod te karakteristike

$$\frac{d}{d\omega} |W_{\phi k}(j\omega)| = \frac{d}{d\omega} \left| \frac{W_{osk}(j\omega)}{W_{ob}(j\omega)} \right| \cdot \frac{\omega}{1/T_i} + \left| \frac{W_{osk}(j\omega)}{W_{ob}(j\omega)} \right| \cdot \frac{1}{1/T_i}$$

koja pri  $\omega = 0$  ima vrijednost

$$\frac{d}{d\omega} |W_{\phi k}(j0)| = \frac{k_{osk}}{k_{ob}} \cdot \frac{1}{1/T_i}$$

Oдавде slijedi da odstupanje amplitudno-frekventne karakteristike filtra od nule će biti manje što je  $T_i$  manje, jer se tada anulira izraz

## PI regulator

Prenosna funkcija PI regulatora je

$$W_r(s) = k_r \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

U tom slučaju slijedi

$$|W_{\phi k}(j\omega)| = \left| \frac{W_{osk}(j\omega)}{W_{ob}(j\omega)} \right| \cdot \frac{1}{k_r} \cdot \frac{T_i \cdot \omega}{\sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}}$$

Pri  $\omega = 0$  taj izraz je jednak nuli, te je potrebno naći prvi izvod

$$\frac{d}{d\omega} |W_{\phi k}(j\omega)| = \left| \frac{W_{osk}(j\omega)}{W_{ob}(j\omega)} \right|' \cdot \frac{1}{k_r} \cdot \frac{T_i \omega}{\sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}} + \left| \frac{W_{osk}(j\omega)}{W_{ob}(j\omega)} \right| \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}} - \frac{T_i^2 \omega^2}{\sqrt{(1 + T_i^2 \omega^2)^3}} \right] \cdot \frac{T_i}{k_r}$$

koja pri  $\omega = 0$  poprima oblik 
$$\frac{d}{d\omega} |W_{\phi k}(j0)| = \frac{k_{osk}}{k_{ob}} \cdot \frac{T_i}{k_r}$$

Poslednja relacija ima najmanje odstupanje od nule kad  $T_i/k_r \rightarrow 0$ , te je optimalno podešenje PI regulatora kada odnos integralnog vremena i pojačanja ima minimalnu vrijednost, odnosno odnos pojačanja i integralnog vremena je maksimalan.



## PID regulator

Prenosna funkcija PID regulatora je  $W_r(s) = k_r \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$ , te je

$$|W_{\phi k}(j\omega)| = \left| \frac{W_{osk}(j\omega)}{W_{ob}(j\omega)} \right| \cdot \frac{1}{k_r} \cdot \frac{T_i \cdot \omega}{\sqrt{(1 - T_d T_i \omega^2)^2 + T_i^2 \omega^2}}$$

Prvi izvod ovoga izraza pri  $\omega = 0$  je  $\frac{d}{d\omega} |W_{\phi k}(j0)| = \frac{k_{osk}}{k_{ob}} \cdot \frac{T_i}{k_r}$  a druga izvod je pri  **$T_d = 0.5 T_i$**  je jednak nuli.

Na taj način, pri optimalnom podešenju regulatora tipa PID kao i kod PI, neophodno je imati maksimalno mogući odnos veličine pojačanja prema integralnom vremenu. Pri tome se diferencijalno vrijeme  $T_d$  pojavljuje kao zavisani parametar podešenja koji je jednoznačno vezan sa veličinom integralnog vremena i mora iznositi polovinu integralnog vremena.

Treba napomenuto da u realnim sistemima nije moguće ekstremno slijediti uslove iz razloga održanja relativne stabilnosti sistema, te ni uslovi neće poprimiti vrijednost nula nego neki minimalni iznos kada se uslovi stabilnosti uzmu u obzir. Zato, u tom slučaju,  **$T_d = 0.5 T_i$**  ne predstavlja tačnu relaciju odnosa diferencijalnog i integralnog vremena. Zato se obično veličina  $k_r$  određuje za nekoliko fiksnih iznosa veličine  **$T_d/T_i$** , bliskih  **$k = 0.5$** , te se odabere zatim ona vrijednost toga odnosa pri kojoj  **$k_r/T_i$**  ima maksimalnu vrijednost.